

УДК 517.984

**ЗАДАЧА НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ
ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ НА ОТРЕЗКЕ
С ПОТЕНЦИАЛОМ ДИРАКА**

А.Г.ГЕЙДАРОВ, П.Б.МАХМУДОВ
Бакинский Государственный Университет
arif_heydarov@mail.ru

В работе рассматривается задача на собственные значения для уравнения Штурма-Лиувилля $-y''(x) + \alpha\delta(x-x_0)y(x) = \lambda y(x)$ на отрезке $[0,1]$ с условиями $y(0) = y(1)$, $y'(0) = y'(1)$, $y(x_0-0) = y(x_0+0)$, $y'(x_0+0) - y'(x_0-0) = \alpha y(x_0)$. Доказана, что рассматриваемая задача имеет две серии собственных значений $\lambda_n = (2\pi n)^2$ ($n = 1, 2, \dots$) и μ_n ($n = 1, 2, \dots$) являющиеся решениями трансцендентного уравнения $\operatorname{tg} \frac{\sqrt{\mu}}{2} = \frac{\alpha}{2\sqrt{\mu}}$. Получена асимптотическая формула для собственных значений μ_n .

Ключевые слова: уравнение Штурма-Лиувилля, потенциал Дирака, собственное значение, собственная функция, асимптотика собственных значений.

Рассмотрим задачу на собственные значения

$$-y''(x) + \alpha\delta(x-x_0)y(x) = \lambda y(x), \quad x \in (0,1) \quad (1)$$

$$y(0) = y(1), \quad y'(0) = y'(1), \quad (2)$$

$$y(x_0) := y(x_0-0) = y(x_0+0), \quad (3)$$

$$y'(x_0+0) - y'(x_0-0) = \alpha y(x_0), \quad (4)$$

где $\delta(x-x_0)$ - функция Дирака в точке $x_0 \in (0,1)$, $0 \neq \alpha \in (-\infty, +\infty)$, λ - спектральный параметр.

Обозначим через $D(A)$ множество функций $y(x) \in W_2^2((0,1) \setminus \{x_0\}) \cap W_2^1(0,1)$, удовлетворяющих условиям (2)-(4). Определим в пространстве $L_2(0,1)$ оператор A равенством

$$Ay = -y''(x) + \alpha\delta(x - x_0) \cdot y(x), \quad y(x) \in D(A),$$

где $y''(x)$ - обобщенная производная второго порядка функции $y(x) \in D(A)$, а произведение $\delta(x - x_0) \cdot y(x)$ определяется по известной формуле:

$$\delta(x - x_0) \cdot y(x) = y(x_0)\delta(x - x_0).$$

Спектральный анализ оператора A имеет важное значение для задач квантовой механики [1], а также для стационарных задач диффузии [2].

Число λ называется собственным значением задачи (1)-(4) или оператора A , если в $D(A)$ существует функция $y(x) \neq 0$, такая, что

$$Ay = \lambda y.$$

Функция $y(x)$ называется собственной функцией оператора A , соответствующей собственному значению λ .

Отметим, что оператор A самосопряжен в пространстве $L_2(0,1)$ и поэтому его собственные значения вещественны. Общая теория операторов Штурма-Лиувилля с потенциалами-распределениями приведена в работе [3], где также рассмотрена подобная задача, но с другими граничными условиями.

Справедлива следующая

Теорема 1. Оператор A имеет две серии собственных значений: $\lambda_n = (2\pi n)^2$ ($n = 1, 2, \dots$) и μ_n ($n = 1, 2, \dots$), где числа μ_n являются решениями трансцендентного уравнения

$$\operatorname{tg} \frac{\sqrt{\mu}}{2} = \frac{\alpha}{2\sqrt{\mu}}. \quad (5)$$

Собственные значения λ_n и μ_n - однократны. Собственные функции, соответствующие собственному значению $\lambda_n = (2\pi n)^2$ имеют вид

$$y_n(x) = C(\sin 2\pi nx - \operatorname{tg} 2\pi nx_0 \cdot \cos 2\pi nx), \quad (6)$$

где $C \neq 0$ - произвольная постоянная.

Собственные функции, соответствующие собственному значению μ_n имеют вид

$$y_n(x) = C(\sin \sqrt{\mu_n} x - \operatorname{tg} \sqrt{\mu_n} x_0 \cdot \cos \sqrt{\mu_n} x). \quad (7)$$

Доказательство. Пусть $\lambda \neq 0$ - собственное значение оператора A , а $y(x)$ - соответствующая собственная функция, т.е. $Ay = \lambda y$. Тогда

$$y(x) = \begin{cases} C_1 \sin \sqrt{\lambda} x + C_2 \cos \sqrt{\lambda} x, & 0 < x < x_0, \\ C_3 \sin \sqrt{\lambda} x + C_4 \cos \sqrt{\lambda} x, & x_0 < x < 1, \end{cases} \quad (8)$$

где C_1, C_2, C_3 и C_4 - некоторые постоянные. В силу условий (2)-(4), для определения постоянных C_1, C_2, C_3 и C_4 получаем следующую систему линейных уравнений

$$\begin{cases} C_2 - C_3 \sin \sqrt{\lambda} - C_4 \cos \sqrt{\lambda} = 0, \\ C_1 \sqrt{\lambda} - C_3 \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} + C_4 \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} = 0, \\ C_1 \sin \sqrt{\lambda} x_0 + C_2 \cos \sqrt{\lambda} x_0 - C_3 \sin \sqrt{\lambda} x_0 - C_4 \cos \sqrt{\lambda} x_0 = 0, \\ C_1 (-\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} x_0 - \alpha \sin \sqrt{\lambda} x_0) + C_2 (\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x_0 - \alpha \cos \sqrt{\lambda} x_0) + \\ \quad + C_3 \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} x_0 - C_4 \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x_0 = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Обозначим через $\Delta(\lambda)$ определитель системы уравнений (9).

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -\sin \sqrt{\lambda} & -\cos \sqrt{\lambda} \\ \sqrt{\lambda} & 0 & -\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} & -\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} \\ \sin \sqrt{\lambda} x_0 & \cos \sqrt{\lambda} x_0 & -\sin \sqrt{\lambda} x_0 & -\cos \sqrt{\lambda} x_0 \\ -\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} x_0 - \alpha \sin \sqrt{\lambda} x_0 & \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x_0 - \alpha \cos \sqrt{\lambda} x_0 & \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} x_0 & -\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x_0 \end{vmatrix}$$

Однородная система уравнений (9) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда $\Delta(\lambda) = 0$. Следовательно, собственные значения оператора A являются решениями уравнения $\Delta(\lambda) = 0$. Для определителя $\Delta(\lambda)$ получаем следующее выражение

$$\Delta(\lambda) = 2\lambda \left(\cos \sqrt{\lambda} - 1 + \frac{\alpha \sin \sqrt{\lambda}}{2\sqrt{\lambda}} \right), \quad (\lambda \neq 0).$$

Число $\lambda \neq 0$ является решением уравнения

$$\cos \sqrt{\lambda} - 1 + \frac{\alpha \sin \sqrt{\lambda}}{2\sqrt{\lambda}} = 0. \quad (10)$$

Учитывая тригонометрические формулы

$$1 - \cos \sqrt{\lambda} = 2 \sin^2 \frac{\sqrt{\lambda}}{2}, \quad \sin \sqrt{\lambda} = 2 \sin \frac{\sqrt{\lambda}}{2} \cos \frac{\sqrt{\lambda}}{2},$$

уравнение (10) можно записать в следующем виде

$$\sin \frac{\sqrt{\lambda}}{2} \left(2 \sin \frac{\sqrt{\lambda}}{2} - \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}} \cos \frac{\sqrt{\lambda}}{2} \right) = 0.$$

Отсюда $\sin \frac{\sqrt{\lambda}}{2} = 0$ или $2 \sin \frac{\sqrt{\lambda}}{2} - \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}} \cos \frac{\sqrt{\lambda}}{2} = 0$.

Уравнение $\sin \frac{\sqrt{\lambda}}{2} = 0$ имеет решения $\lambda_n = (2\pi n)^2$ ($n=1,2,\dots$). Второе уравнение можно записать в виде

$$\operatorname{tg} \frac{\sqrt{\lambda}}{2} = \frac{\alpha}{2\sqrt{\lambda}}.$$

Это уравнение имеет бесконечно много действительных корней, так как графики функций $\operatorname{tg} \frac{\sqrt{\lambda}}{2}$ и $\frac{\alpha}{2\sqrt{\lambda}}$ пересекаются в бесконечно много точках.

Пусть $\lambda = 0$. Тогда

$$y(x) = \begin{cases} C_1 x + C_2, & 0 < x < x_0, \\ C_3 x + C_4, & x_0 < x < 1. \end{cases}$$

В силу условий (2)-(4) получаем $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$. Следовательно, число $\lambda = 0$ не является собственным значением оператора A .

Прямые вычисления показывают, что собственные функции оператора A имеют вид (6) и (7). Очевидно, что собственные значения λ_n и μ_n однократны. Теорема доказана.

В следующей теореме устанавливается асимптотическая формула для собственных значений μ_n .

Теорема 2. Для собственных значений μ_n справедлива асимптотическая формула

$$\begin{aligned} \mu_n = & 2\alpha + (2\pi n)^2 - \frac{\alpha^2(\alpha+6)}{24} \left(\frac{1}{\pi n}\right)^2 - \frac{\alpha^3(\alpha+12)}{96} \left(\frac{1}{\pi n}\right)^4 + \\ & + O\left(\frac{1}{n^4}\right), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (11)$$

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{tg} z = \frac{a}{z} \quad (a \in R). \quad (12)$$

Это уравнение имеет бесконечно много действительных корней. Это видно из графиков функций $\operatorname{tg} x$ и $\frac{a}{x}$. Нетрудно показать, что уравнение (12) имеет только действительные корни.

Пусть x_n - корень уравнения (12) из интервала $\left(n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$. Используя известную методику ([4], §41), ([5], гл. I, §5) найдем асимптотику x_n при $n \rightarrow \infty$. Положим $x = n\pi + y$, $\frac{1}{n\pi} = \varepsilon$. Тогда для y получаем уравнение

$$f(y) = \varepsilon, \quad f(y) = \frac{\sin y}{a \cos y - y \sin y}. \quad (13)$$

При $\varepsilon = 0$ уравнение (13) имеет простой корень $y = 0$. Найдем асимптотику решения $y(\varepsilon)$ уравнения (13) такого, что $y(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Очевидно, что функция $f(y)$ регулярна в точке $y = 0$ и точка $y = 0$ простой нуль функции $f(y)$. Поэтому

$$y(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \varepsilon^k, \quad (14)$$

где коэффициенты C_k вычисляются по формуле Бурмана-Лагранжа:

$$C_k = \frac{1}{k!} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{d^{k-1}}{dy^{k-1}} \left(\frac{y}{f(y)} \right)^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Проведя прямые вычисления, получаем

$$C_1 = a, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = -\frac{a^2(a+3)}{3}.$$

Отметим, что коэффициенты при четных степенях $(n\pi)^{-1}$ равны нулю, так как $f(y)$ - нечетная функция.

В результате получаем асимптотику решения уравнения $\operatorname{tg} x = \frac{a}{x}$:

$$x_n = \pi n + \frac{a}{\pi n} - \frac{a^2(a+3)}{3} \left(\frac{1}{\pi n} \right)^3 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{C_{2k+1}}{(\pi k)^{2k+1}}.$$

В частности,

$$x_n = \pi n + \frac{a}{\pi n} - \frac{a^2(a+3)}{3} \left(\frac{1}{\pi n} \right)^3 + O\left(\frac{1}{n^5} \right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (15)$$

Используя (15), найдем асимптотику решения уравнения (12). Положим

$x_n = \frac{\sqrt{\mu_n}}{2}$, $a = \frac{\alpha}{4}$. Тогда из (15) получаем

$$\sqrt{\mu_n} = 2\pi n + \frac{\alpha}{2\pi n} - \frac{\alpha^2(\alpha+12)}{96} \left(\frac{1}{\pi n} \right)^3 + O\left(\frac{1}{n^5} \right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Возведя обе части в квадрат последнего равенства, после несложных преобразований получаем (11).

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Альбеверио С., Гестези Ф., Хезг-Крон Р., Хольден Х. Решаемые модели в квантовой механике. М.: Мир, 1991, 568 с.
2. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982, 320 с.

3. Савчук А.М., Шкалик А.А. Операторы Штурма-Лиувилля с потенциалами-распределениями // Труды Московского матем. об-ва, т.64, 2003, с.159-212.
4. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1982, 488 с.
5. Федорюк М.В. Асимптотика: Интегралы и ряды. М.: Наука, 1987, 544 с.

DİRAK POTENSİALLI ŞTURM-LİUVİLL TƏNLİYİ ÜÇÜN PARÇADA MƏXSUSİ QIYMƏTLƏR MƏSƏLƏSİ

A.H.HEYDƏROV, P.B.MAHMUDOV

XÜLASƏ

Məqalədə $-y''(x) + \alpha\delta(x - x_0)y(x) = \lambda y(x)$ Şturm-Liuvill tənliyi üçün $[0,1]$ parçasında $y(0) = y(1)$, $y'(0) = y'(1)$, $y(x_0 - 0) = y(x_0 + 0)$, $y'(x_0 + 0) - y'(x_0 - 0) = \alpha y(x_0)$ şərtlərini ödəyən məxsusi qiymətlər məsələsinə baxılmışdır. İsbat edilmişdir ki, bu məsələnin iki seriyadan ibarət olan məxsusi qiymətləri var: $\lambda_n = (2\pi n)^2$ ($n = 1, 2, \dots$) və μ_n ($n = 1, 2, \dots$), burada μ_n ədədləri $\operatorname{tg} \frac{\sqrt{\mu}}{2} = \frac{\alpha}{2\sqrt{\mu}}$ transendent tənliyinin həlləridir. Həmçinin μ_n məxsusi qiymətləri üçün asimptotik düstur alınmışdır.

Açar sözlər: Şturm-Liuvill tənliyi, Dirak potensialı, məxsusi qiymət, məxsusi funksiya, məxsusi qiymətlərin asimptotikası.

AN EIGENVALUE PROBLEM FOR THE STURM-LIOUVILLE EQUATION WITH DIRAC POTENTIAL ON A SEGMENT

A.H.HEYDAROV, P.B.MAHMUDOV

SUMMARY

In this work an eigenvalue problem on the segment $[0,1]$ generated by the Sturm-Liouville equation $-y''(x) + \alpha\delta(x - x_0)y(x) = \lambda y(x)$ and condinous $y(0) = y(1)$, $y'(0) = y'(1)$, $y(x_0 - 0) = y(x_0 + 0)$, $y'(x_0 + 0) - y'(x_0 - 0) = \alpha y(x_0)$ is considered. It is proved that the considered problem has two series of eigenvalues $\lambda_n = (2\pi n)^2$ ($n = 1, 2, \dots$) and μ_n ($n = 1, 2, \dots$) which are roots of the transcendental equation $\operatorname{tg} \frac{\sqrt{\mu}}{2} = \frac{\alpha}{2\sqrt{\mu}}$. Asymptotic formula for the eigenvalues μ_n is obtained.

Key words: Sturm-Liouville equation, Dirac potential, eigenvalue, eigenfunction, asymptotic of eigenvalues.

Принята в редакцию: 24.12.2014 г.

Подписано к печати: 20.04.2015 г.